# EUCLIDES

*MAANDBLAD*
*VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN*

*ORGAAN VAN*
*DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL*

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

38e JAARGANG 1962/1963

II - 1 OKTOBER 1962

INHOUD



P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift Euclides verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.



De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

*Boeken ter bespreking* en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

*Artikelen ter opname* aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

*Opgaven voor de „kalender"* in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

# BOOLE'SE ALGEBRA'S[1])

door

Prof. Dr. Ph. Dwinger

LAFAYETTE (IND) - USA

## 1. *Historisch overzicht en inleiding.*

Boole'se algebra's zijn genoemd naar George Boole (1815—1847) die in zijn in 1847 verschenen „The mathematical analysis of logic" voor het eerst consequent algebraïsche methodes toepaste teneinde de logica te formaliseren. In de jaren die volgden werden de Boole'se algebra's intens bestudeerd als een nieuwe tak der wiskunde maar toch wel steeds in verband met deze belangrijke toepassingen in de logica. In de dertiger jaren vond een nieuwe belangrijke opbloei van de studie der Boole'se algebra's plaats die tot een zeer grote verdieping en nieuwe inzichten heeft geleid. Deze nieuwe opbloei was hoofdzakelijk geïnspireerd door de studie van andere gebieden der wiskunde (maattheorie, verzamelingenleer, Hilbertruimten) waarin nieuwe structuren naar voren traden, die in wezen dezelfde eigenschappen bleken te hebben als de Boole'se algebra's. Als grondleggers van deze nieuwe richting moeten vooral Tarski en Stone beschouwd worden. De laatste wiskundige publiceerde in 1936 en 1937 twee grote artikelen [2]) die nu klassiek geworden zijn en waarin hij de grondslagen legde voor een geheel nieuwe ontwikkeling en studie der Boole'se algebra's. Stone toonde in zijn werk o.a. aan dat de theorie der Boole'se algebra's ten nauwste verwant is met de verzamelingenleer en met de topologie. Vooral de laatste verwantschap bleek hoogst verrassend te zijn. Stone bewees n.l. dat de theorie der Boole'se algebra's niet alleen als een hoofdstuk der algebra beschouwd kan worden maar tevens als een hoofdstuk der topologie. Elk probleem in de Boole'se algebra's kan thans op twee wijzen benaderd worden, algebraïsch en topologisch. Het hangt geheel af van de aard van het probleem welke methode men kiest. Soms blijkt de algebraïsche werkwijze de meest doeltreffende maar in vele gevallen blijkt de topologie een machtig hulpmiddel te

---

[1]) Voordracht Vakantiecursus Mathematisch Centrum Amsterdam, 29 augustus 1961.

[2]) Een volledige literatuurlijst kan gevonden worden in [5].

zijn, niet alleen in de formuleringen, maar ook in de ontdekking van nieuwe stellingen.

Toch is het verband met de logica niet verloren gegaan. Vooral in de laatste jaren is de nieuwe theorie een belangrijk hulpmiddel geworden in de studie der moderne logica. In dit verband moet vooral het werk van Halmos, Tarski en de Poolse school genoemd worden. Daarnaast zijn de relaties met andere gebieden der wiskunde thans talrijk. We hebben reeds de topologie genoemd, de verzamelingenleer en de logica. We kunnen hieraan toevoegen de abstracte algebra, de theorie der tralies (lattices), de functionaal analyse, de maattheorie en de waarschijnlijkheidsrekening. Tenslotte moet erop gewezen worden dat heden ten dage Boole'se algebra's ook een zeer belangrijke rol spelen in praktische toepassingen als rekenmachines, automatic control device, switching circuits etc.

Sinds het verschijnen van de artikelen van Stone en Tarski is een enorme vloed van publikaties over Boole'se algebra's gevolgd en deze duurt nog steeds door. In het volgende zullen we trachten over de voornaamste punten der nieuwe ontwikkeling iets te zeggen, al zullen we voor de bewijzen meestal naar de literatuur moeten verwijzen. De lezer, die meer over het onderwerp wenst te weten, raadplege één of meer van de werken die aan het eind van dit artikel genoemd worden.

## 2. *Definities en elementaire eigenschappen.*

We zullen beginnen met een belangrijke categorie voorbeelden te geven die van verzameling-theoretisch karakter zijn en die een zeer belangrijke rol zullen spelen in de representatietheorie.

Zij $V$ een niet lege verzameling van elementen. $V$ kan eindig of oneindig zijn. We beschouwen nu naast $V$, de verzameling die gevormd wordt door alle deelverzamelingen van $V$. Deze nieuwe verzameling noemen we $\mathfrak{X}$. We merken op dat we de lege deelverzameling $\emptyset$ van $V$ en $V$ zelf ook als elementen van $\mathfrak{X}$ beschouwd wensen te zien. Dit betekent dus dat $\mathfrak{X}$ minstens twee elementen heeft. We kunnen nu, zoals welbekend is, op $\mathfrak{X}$ algebraïsche operaties definiëren en wel als volgt. Veronderstel dat $A$ en $B$ twee elementen zijn van $\mathfrak{X}$. $A$ en $B$ zijn dus deelverzamelingen van $V$ en hoeven niet noodzakelijkerwijze als verschillend aangenomen te worden.

De verzameling van alle elementen van $V$, die òf tot $A$ òf tot $B$ òf tot beide behoren wordt de *vereniging* van $A$ en $B$ genoemd en wordt aangeduid met $A \cup B$. Dit is dus weer een deelverzameling van $V$ en dus een element van $\mathfrak{X}$.

De verzameling van alle elementen, die zowel tot $A$ als tot $B$

behoren, wordt de *doorsnede* van $A$ en $B$ genoemd en wordt aangeduid met $A \cap B$ en dit is dus weer een element van $\mathfrak{X}$. Tenslotte verstaan we onder het *complement* van een deelverzameling $A$ van $V$, diè deelverzameling van $V$ die uit alle elementen van $V$ bestaat, die niet tot $A$ behoren. Het complement van $A$ wordt aangeduid door $\bar{A}$ of $A^-$. In het bijzonder wijzen we erop dat b.v. $V^- = \emptyset$ en $\emptyset^- = V$. Indien twee deelverzamelingen $A$ en $B$ geen element gemeen hebben, dan is natuurlijk $A \cap B = \emptyset$.

De operaties $\cup$ en $\cap$ worden in de algebra *binaire* operaties genoemd omdat ze aan twee elementen $A$ en $B$ van $\mathfrak{X}$ éénduidig een element, resp. $A \cup B$ en $A \cap B$ toevoegen. Analoog wordt de operatie $A^-$ („*complementneming*") een *unaire* operatie genoemd.

Tenslotte voeren we nog het symbool $\subset$ in. Indien $A$ en $B$ twee deelverzamelingen van $V$ zijn (dus elementen van $\mathfrak{X}$), dan betekent $A \subset B$ dat elk element van $A$ een element van $B$ is. Kort gezegd: $A \subset B$ betekent dat $A$ in $B$ bevat is.

De relatie $A \subset B$ wordt ook wel een *binaire* relatie genoemd omdat voor elk (geordend) paar elementen $A$ en $B$, $A \subset B$ wèl of nièt waar is. We merken op dat de relatie $\subset$ aan de volgende regels voldoet:

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{l} A \subset A \\ A \subset B \text{ èn } B \subset C \rightarrow A \subset C \\ A \subset B \text{ èn } B \subset A \rightarrow A = B \end{array}$$

Voor het gemak zullen we reeds hier het begrip $\subset$ abstraheren omdat we het toch straks nodig hebben en dit nu eenvoudig te doen is.

Veronderstel dat $P$ een verzameling van elementen is en neem aan dat op $P$ een binaire relatie $\leqq$ is gedefinieerd die aan de volgende eigenschappen voldoet:

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{l} a \leqq a \\ a \leqq b \text{ èn } b \leqq c \rightarrow a \leqq c \\ a \leqq b \text{ èn } b \leqq a \rightarrow a = b \end{array}$$

In dit geval zeggen we dat $P$ *een gedeeltelijk geordende* verzameling is.

We geven twee voorbeelden: De gehele getallen zijn gedeeltelijk geordend onder $\leqq$, waar $\leqq$ de gewone betekenis heeft. De gedeeltelijke ordening is hier „totaal" omdat voor elk tweetal getallen $a$ en $b$ we steeds òf $a \leqq b$ òf $b \leqq a$ hebben. We kunnen echter ook makkelijk een voorbeeld geven van een gedeeltelijke ordening die niet totaal is. Beschouw de verzameling $P$ van positieve gehele getallen. Laat nu $a \leqq b$ betekenen dat $a$ op $b$ deelbaar is. De lezer controlere dat dit inderdaad een gedeeltelijke ordening is.

Onze bovenstaande verzameling $\mathfrak{X}$ is echter óók gedeeltelijk geordend en wel onder de binaire relatie $\subset$ omdat de eigenschappen (I) gelden. Dat we hier niet het symbool $\leqq$ maar $\subset$ gebruiken, is natuurlijk onbelangrijk. Het symbool $\subset$ is nu eenmaal een ingeburgerd symbool in de verzamelingenleer.

We keren nu terug tot onze verzameling $\mathfrak{X}$ en de drie operaties: vereniging, doorsnede en complementneming. Voor deze operaties geldt een reeks eigenschappen waarvan we de bewijzen die alle zeer eenvoudig zijn aan de lezer overlaten.

$$
\text{(III)}\quad
\begin{array}{ll}
A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
A \cup A = A & A \cap A = A \\
A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\
A \cup (A \cap B) = A & A \cap (A \cup B) = A \\
A \cup (B \cap C) = & A \cap (B \cup C) = \\
\quad (A \cup B) \cap (A \cup C) & \quad (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup \emptyset = A & A \cap V = A \\
A \cap \emptyset = \emptyset & A \cup V = V \\
A \cup A^- = V & A \cap A^- = \emptyset
\end{array}
$$

Verder geldt nog:

$$A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B \leftrightarrow A \cap B = A$$

Tenslotte willen we nog op het volgende wijzen. Indien $A$ en $B$ twee deelverzamelingen van $V$ zijn dan is $A \cup B$ blijkbaar het *supremum* van $A$ en $B$.

Met supremum bedoelen we hier het volgende. $A$ en $B$ zijn beide bevat in $A \cup B$, terwijl $A \cup B$ blijkbaar de kleinste deelverzameling is van $V$ die $A$ en $B$ bevat. Analoog is $A \cap B$ het *infimum* van $A$ en $B$. Dit betekent dus dat $A$ en $B$ beide $A \cap B$ bevatten, terwijl $A \cap B$ blijkbaar de grootste deelverzameling is van $V$, die in $A$ en $B$ bevat is.

Voordat we nu overgaan tot het definiëren van een abstracte Boole'se algebra willen we nog het volgende opmerken over ons bovenstaand voorbeeld. Wat we blijkbaar verkregen hebben is een verzameling $\mathfrak{X}$ waarop twee binaire en een unaire operatie gedefinieerd zijn, waarvoor de regels (III) gelden. We kunnen dus $\mathfrak{X}$ als een algebra beschouwen met deze drie operaties. Deze algebra wordt wel met het woord *verzamelingenalgebra* („complexcalculus") aangeduid. Bovendien is $\mathfrak{X}$ een gedeeltelijk geordende verzameling onder de binaire relatie $\subset$. Tenslotte spelen de elementen $\emptyset$ en $V$ van $\mathfrak{X}$ een speciale rol die door de regels (III) bepaald is.

We kunnen nu overgaan tot de definitie van een Boole'se algebra.

Een *Boole'se algebra* is een verzameling $B$ die uit minstens twee elementen bestaat en waarop twee binaire operaties $+$ (*som*) en $\times$ (*produkt*) en een unaire operatie $^-$ (*complementneming*) gedefinieerd zijn en die twee elementen 0 (*nulelement*) en 1 (*eenheidselement*) heeft waarvoor de volgende regels gelden:

$$
\text{(IV)}\quad
\begin{array}{ll}
x+y = y+x & xy = yx\,^{1)} \\
x+x = x & xx = x \\
x+(y+z) = (x+y)+z & x(yz) = (xy)z \\
x+xy = x & x(x+y) = x \\
x+yz = (x+y)(x+z) & x(y+z) = xy+xz \\
x+0 = x & x1 = x \\
x0 = 0 & x+1 = 1 \\
x+\bar{x} = 1 & x\bar{x} = 0
\end{array}
$$

Het is duidelijk dat elke verzamelingenalgebra een Boole'se algebra is. De elementen $\emptyset$ en $V$ spelen resp. de rol van het nulelement en het eenheidselement. Vereniging en doorsnede zijn resp. som en produkt. Om deze reden noemt men wel de som en produkt in een Boole'se algebra ook resp. vereniging („join") en doorsnede („meet"). We hadden natuurlijk in de definitie van een Boole'se algebra net zo goed de tekens $\cup$ en $\cap$ kunnen gebruiken i.p.v. $+$ en $\times$, maar het gebruik van de laatste heeft soms een praktisch voordeel.

De meest voor de hand liggende vraag is nu wel de volgende. Welke van de eigenschappen die voor een verzamelingenalgebra gelden, gelden nu ook voor Boole'se algebra's? Indien we een eigenschap voor verzamelingenalgebra's bewijzen willen, dan zullen we in het algemeen gebruik maken van het feit dat we weten dat een verzamelingenalgebra de verzameling van alle deelverzamelingen is van een verzameling. Maar indien we een willekeurige Boole'se algebra $B$ hebben dan weten we alleen maar dat voor $B$ de eigenschappen (IV) gelden en we mogen diè dus alleen gebruiken.

Een voorbeeld moge dit illustreren. Indien $A$ een deelverzameling van een verzameling $V$ is, dan is het complement $A^-$ eenduidig bepaald. Dat wil zeggen er bestaat precies één deelverzameling $A^-$ zodanig dat $A \cup A^- = V$ en $A \cap A^- = \emptyset$. Dat volgt natuurlijk onmiddellijk uit de definitie van $A^-$. Maar wat betekent nu het analoge resultaat bij Boole'se algebra's? Daar hebben we een minder triviale situatie. De operatie complementneming is een unaire operatie. Dat wil dus zeggen dat voor elk element $x$ van $B$ een

---

[1]) Met $xy$ bedoelen we natuurlijk $x \times y$.

element $\bar{x}$ éénduidig bepaald is, dat bovendien aan de eigenschappen $x+\bar{x} = 1$ en $x\bar{x} = 0$ voldoet. Maar het is niet onmiddellijk duidelijk dat er niet een ander element $x'$ kan zijn dat ook aan deze eigenschappen voldoet, dus waarvoor ook geldt $x+x' = 1$ en $xx' = 0$. Dat dit niet het geval kan zijn volgt nu hier echter eenvoudig uit de eigenschappen (IV). We hebben n.l. $\bar{x} = 0+\bar{x} = xx'+\bar{x} = (x+\bar{x})(x'+\bar{x}) = x'+\bar{x}$, waarbij we dus enige van de eigenschappen (IV) hebben gebruikt. Maar het rechterlid is symmetrisch in $\bar{x}$ en $x'$ dus volgt ook $x' = x'+\bar{x}$ en dus $\bar{x} = x'$.

Verder hebben we gezien dat de elementen van een verzamelingenalgebra gedeeltelijk geordend kunnen worden onder de relatie $\subset$. Maar het is natuurlijk onmogelijk een analogon van de definitie van $A \subset B$ te vinden voor een willekeurige Boole'se algebra. We herinneren de lezer er echter aan dat de relatie $\subset$ voldeed aan de betrekkingen $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B \leftrightarrow A \cap B = A$.

Het ligt nu voor de hand een binaire relatie $\leqq$ op elke Boole'se algebra $B$ als volgt te definiëren:

$$x \leqq y \leftrightarrow x+y = y \leftrightarrow xy = x$$

(De lezer bewijze zelf dat we altijd hebben dat $xy = x$ dan en slechts dan als $x+y = y$ is).

We moeten dan natuurlijk bewijzen dat $\leqq$ een gedeeltelijke ordening is en dus aan de eigenschappen (II) voldoet. Maar dat is een eenvoudige oefening die we dus weer aan de lezer kunnen overlaten.

De analogie met verzamelingenalgebra's gaat echter nog verder (maar er is een grens!!). We hebben boven opgemerkt dat als $A$ en $B$ twee deelverzamelingen van een verzameling $V$ zijn dat $A \cup B$ als het supremum en $A \cap B$ als het infimum van $A$ en $B$ beschouwd kunnen worden. Het volgende is nu weer eenvoudig te bewijzen (oefening!). Zij $x$ en $y$ twee elementen van een Boole'se algebra $B$. Dan is $x+y$ het supremum van $x$ en $y$ en $xy$ is het infimum van $x$ en $y$. Dat wil dus precies het volgende zeggen.

$x+y \geqq x, x+y \geqq y$ en indien $z \geqq x, z \geqq y$ dan $z \geqq x+y$ [1])
$xy \leqq x, xy \leqq y$ en indien $z \leqq x, z \leqq y$ dan $z \leqq xy$.

We zien dus dat elke Boole'se algebra als een gedeeltelijke geordende verzameling beschouwd kan worden waarvan elk tweetal elementen een supremum (som) en een infimum (produkt) heeft. Een gedeeltelijke geordende verzameling die de eigenschap heeft

---

[1]) Natuurlijk bedoelen we met $x \geqq y$ hetzelfde als $y \leqq x$.

dat elk tweetal elementen een suprêmum en een infimum heeft wordt ook wel een *tralie* („lattice") genoemd. Boole'se algebra's zijn dus een speciaal soort tralies. We merken op dat niet elke tralie een Boole'se algebra is, zelfs niet als de tralie een nulelement en een eenheidselement heeft. De lezer ga na welke van de eigenschappen van (III) voor elke tralie gelden en welke niet hoeven te gelden (het laatste door tegenvoorbeelden).

We zullen nu nog enige eigenschappen voor Boole'se algebra's vermelden die analoga zijn van verzamelingtheoretische eigenschappen. De bewijzen zijn weer goede oefeningen, die niet moeilijk zijn.

$$x+y = x+\bar{x}y \qquad xy = x(\bar{x}+y)$$
$$x \leqq y \leftrightarrow x\bar{y} = 0 \leftrightarrow \bar{x} + y = 1$$
$$\text{(V)} \quad x \leqq y \leftrightarrow \bar{x} \geqq \bar{y}$$
$$(x+y)^- = \bar{x}\bar{y} \text{ en } (xy)^- = \bar{x}+\bar{y} \text{ (eigenschappen van } \textit{de Morgan})$$

We zullen nu enige voorbeelden van Boole'se algebra's geven. We hebben al gezien dat elke verzamelingenalgebra een Boole'se algebra is.

*Voorbeeld 1.* Zij $V$ een verzameling. Zij $\mathfrak{X}$ de verzameling van alle deelverzamelingen $A$ van $V$ zodanig dat òf $A$ òf $A^-$ eindig is. Het is duidelijk dat $\mathfrak{X}$ gesloten is onder de verzamelingtheoretische operaties: vereniging, doorsnede en complementneming. Hieruit volgt dat $\mathfrak{X}$ een Boole'se algebra is. We merken op dat indien $V$ eindig is, dat dan $\mathfrak{X}$ een verzamelingenalgebra is.

*Voorbeeld 2.* Zij $I$ het naar links gesloten en naar rechts open interval $[0,1)$ van de reële getallenrechte. Het is duidelijk dat de verzameling van alle naar links gesloten en naar rechts open intervallen $[\alpha, \beta)$ $\alpha, \beta \,\varepsilon\, I$ gesloten is onder eindige doorsneden, maar niet onder eindige verenigingen en onder complementneming. Dit is echter wel het geval met de verzameling van alle eindige verenigingen van genoemde intervallen en deze verzameling is daarom een Boole'se algebra die wel de *intervalalgebra* van het eenheidsinterval genoemd wordt.

*Voorbeeld 3.* De „twee-elementen" Boole'se algebra. Deze bestaat uit slechts twee elementen 0 en 1, waarvoor geldt $0+0 = 0.0 = 0.1 = 0$; $1+1 = 1.1 = 0+1 = 1$, $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$.

We hebben reeds in de inleiding opgemerkt dat deze Boole'se algebra een belangrijke rol in de praktische toepassingen speelt.

*Voorbeeld 4.* Zij $m$ een geheel getal, groter dan 1 en zij $m$ niet deelbaar door het kwadraat van een priemgetal. Zij $B$ de verzameling van alle gehele positieve getallen die op $m$ deelbaar zijn. Definieer nu $a+b =$ kleinste gemene veelvoud van $a$ en $b$; $ab =$ grootste gemene deler van $a$ en $b$; $\bar{a} = m/a$. De lezer bewijze dat $B$ een Boole'se algebra is. $B$ is gedeeltelijk geordend door $a \leqq b \leftrightarrow a/b$.

*Voorbeeld 5.* Zij $V$ een verzameling. We beschouwen de verzameling $\mathfrak{B}$ van alle deelverzamelingen van $V$ modulo eindige deelverzamelingen, d.w.z. we „identificeren" twee deelverzamelingen van $V$ indien ze „op eindig vele elementen na" samenvallen. Om een preciese definitie van $\mathfrak{B}$ te geven moeten we gebruik maken van het begrip equivalentierelatie en we nemen aan dat de lezer op de hoogte is van dit begrip [1]).

We definiëren daartoe op de verzameling der deelverzamelingen van $V$ een binaire relatie $\backsim$ door $A \backsim B \leftrightarrow A \bigtriangleup B$ is eindig, waarbij $A \bigtriangleup B = (A \cap B^-) \cup (A^- \cap B)$ ($A \bigtriangleup B$ wordt wel het *symmetrische verschil* van $A$ en $B$ genoemd). De lezer bewijze dat $\backsim$ een equivalentierelatie is. We beschouwen nu de verzameling $\mathfrak{B}$ van equivalentieklassen, waarbij voor elke deelverzameling $A$ van $V$, $[A]$ de equivalentieklasse voorstelt waartoe $A$ behoort (dus $[A]$ is een element van $\mathfrak{B}$). Vervolgens definiëren we een gedeeltelijke ordening op $\mathfrak{B}$ door $[A] \leqq [B] \leftrightarrow A \cap B^-$ is eindig. De lezer bewijze weer dat onder deze gedeeltelijke ordening $\mathfrak{B}$ een Boole'se algebra is. (Men moet dus bewijzen dat $\mathfrak{B}$ een tralie is waarvoor de eigenschappen (III) gelden. Men kan ook rechtstreeks als volgt te werk gaan. Definieer op $\mathfrak{B}$ drie operaties door $[A]+[B] = [A \cup B]$, $[A][B] = [A \cap B]$ en $[A]^- = [A^-]$. Men moet dan natuurlijk bewijzen dat deze operaties onafhankelijk zijn van de representanten en dat zij weer voldoen aan (III), maar dat is niet moeilijk.)

*Voorbeeld 6.* Dit voorbeeld is ontleend aan de maattheorie. Zij $I$ het gesloten eenheidsinterval van de reële getallenrechte. Zij $L$ de verzameling van deelverzamelingen van $I$ die Lebesgue-meetbaar zijn. Dan is het niet moeilijk te zien dat $L$ een Boole'se algebra is onder de verzamelingtheoretische operaties. Daarnaast kan men ook nog beschouwen de Boole'se algebra van Lebesgue-meetbare deelverzamelingen modulo deelverzamelingen van maat 0. (Men gaat weer op dezelfde wijze te werk als in voorbeeld 5. Twee Lebesgue-

---

[1]) Verg. Loonstra, Inleiding tot de algebra, Noordhoff 1958.

meetbare deelverzamelingen worden „geïdentificeerd" indien hun symmetrisch verschil een Lebesgue-maat 0 heeft) [1]).

3. *Representatie theorie.*

We hebben gezien dat elke verzamelingenalgebra een Boole'se algebra is. Men kan nu omgekeerd de vraag stellen of soms elke Boole'se algebra een verzamelingenalgebra is. Teneinde deze vraag precies te formuleren maken we gebruik van het welbekende algebraïsche begrip *isomorfie.*

Veronderstel dat $B$ en $B'$ twee Boole'se algebras zijn. We zeggen dat $B$ en $B'$ *isomorf* zijn indien er een ééneénduidige afbeelding $h$ bestaat van $B$ op $B'$ zodanig dat

$$h(x+y) = h(x)+h(y)$$
$$h(xy) = h(x)h(y)$$
$$(h(x))^{-} = h(\bar{x})$$

De bovenstaande vraag kan nu als volgt scherper geformuleerd worden: Is elke Boole'se algebra isomorf met een verzamelingenalgebra?

We zullen zien dat dit niet het geval is. Om dit in te zien voeren we eerst een nieuw begrip in n.l. het begrip „atoom".

Zij $B$ een Boole'se algebra. Een element $p$, $p \neq 0$, van $B$ wordt een *atoom* genoemd indien $a \leqq p \rightarrow a = 0$ of $a = p$.

Verder wordt een Boole'se algebra $B$ *atomistisch* genoemd indien elk element van $B$ dat niet het nulelement is, een atoom bevat.

Het is onmiddellijk duidelijk, dat elke verzamelingenalgebra atomistisch is. We beschouwen nu het bovenstaande voorbeeld 2. Het is niet moeilijk te zien dat in dit geval $B$ geen atomen heeft. Maar indien een Boole'se algebra isomorf is met een verzamelingenalgebra dat moet hij natuurlijk atomistisch zijn. Hierdoor zien we dat dus niet elke Boole'se algebra isomorf met een verzamelingenalgebra is. Het is niet moeilijk te zien dat ook voorbeeld 5 en het laatste geval van voorbeeld 6 Boole'se algebra's zijn die niet isomorf zijn met een verzamelingenalgebra (maar in voorbeeld 5 moet men dan veronderstellen dat $V$ oneindig is). We merken nog op dat voorbeeld 1 atomistisch is, maar toch is dit geen verzamelingenalgebra (de lezer probere dit te bewijzen; men moet weer aannemen dat $V$ oneindig is).

Aan de andere kant is het niet moeilijk te bewijzen, dat elke eindige Boole'se algebra $B$ isomorf is met een verzamelingen-

---

[1]) Deze Boole'se algebra wordt ook wel met $L/L_0$ aangeduid.

algebra. We zullen dit bewijs in grote trekken schetsen.

Zij $B$ een eindige Boole'se algebra. Het is duidelijk dat $B$ atomistisch is. We beschouwen nu de verzameling $V$ van alle atomen van $B$. Zij $\mathfrak{X}$ de Boole'se algebra van alle deelverzamelingen van $V$. We definiëren nu een afbeelding $h$ van $B$ op $\mathfrak{X}$ als volgt. Voor elk element $a$ van $B$ definiëren we $h(a)$ als diè deelverzameling van $V$ die bestaat uit alle atomen van $B$ die in $a$ bevat zijn. Het is niet moeilijk te bewijzen dat $h$ een isomorfe afbeelding is van $B$ op $\mathfrak{X}$.

Uit bovenstaande redenering kan men nog een andere interessante conclusie trekken betreffende *eindige* Boole'se algebra's. Indien het aantal atomen van $B$ voorgesteld wordt door $n$, dan is het duidelijk dat het aantal elementen van $\mathfrak{X}$ $2^n$ is. Hieruit volgt dat het aantal elementen van een eindige Boole'se algebra altijd van de vorm $2^n$ is, waar $n$ een geheel positief getal is.

We keren nu terug tot het algemene geval en we hebben dus gezien dat niet elke Boole'se algebra isomorf is met een verzamelingenalgebra.

De vraag is nu of we een grotere klasse van Boole'se algebra's kunnen construeren zodanig dat elke Boole'se algebra isomorf is met een exemplaar van deze klasse. We zullen zien, dat zulk een klasse inderdaad bestaat en daartoe voeren we eerst een nieuw begrip in.

Zij $V$ een verzameling. Zij $\mathfrak{X}$ een verzameling van deelverzamelingen van $V$ ($\mathfrak{X}$ hoeft dus niet *alle* deelverzamelingen van $V$ te bevatten).

Veronderstel nu dat $V$ gesloten is onder (eindige) vereniging, onder (eindige) doorsnede en onder complementneming. In dit geval noemen we $\mathfrak{X}$ een *verzamelingenlichaam*. We kunnen dus kortweg zeggen dat een verzamelingenlichaam een verzameling van deelverzamelingen van een verzameling is, die gesloten is onder de verzamelingtheoretische operaties [1]). We merken op dat na-

---

[1]) De lezer verwarre dit begrip van verzamelingenlichaam niet met het begrip lichaam uit de algebra. De twee begrippen hebben niets met elkaar te maken. Sommige schrijvers gebruiken echter i.p.v. de term „verzamelingenlichaam" de term verzamelingenring" Deze benaming is eigenlijk beter omdat elk verzamelingenlichaam een algebraïsche ring wordt onder de operaties symmetrisch verschil en doorsnede. Er is dus op dit punt enige verwarring in de terminologie, maar de term „verzamelingenlichaam" is toch wel het meest in gebruik.
De verwarring wordt nog erger als men weet dat in de literatuur de term „verzamelingenring" ook wel gebruikt wordt om een verzameling van deelverzamelingen van een verzameling aan te duiden, die gesloten is onder vereniging en doorsnijding en dus niet noodzakelijkerwijze onder complementneming.

tuurlijk elke verzamelingenalgebra een verzamelingenlichaam is. Maar het is tevens niet moeilijk te zien dat de voorbeelden 1 en 2 en het eerste geval van voorbeeld 6 ook verzamelingenlichamen zijn.

We kunnen nu de vraag stellen of elke Boole'se algebra isomorf is met een verzamelingenlichaam. Het antwoord op deze vraag wordt gegeven door het klassieke resultaat van Stone die heeft bewezen dat dit inderdaad zo is.

Dus: *Elke Boole'se algebra is isomorf met een verzamelingenlichaam.*

Op het bewijs van deze stelling kunnen we hier niet ingaan en we moeten daarvoor de lezer naar de literatuur verwijzen.

Voordat we de beschouwingen van deze paragraaf beëindigen willen we nog een vraag beantwoorden die eigenlijk al min of meer naar voren is gekomen voor eindige Boole'se algebra's. We hebben boven gezien dat het aantal elementen van een eindige Boole'se algebra altijd van de vorm $2^n$ moet zijn. Omgekeerd is het makkelijk te zien dat voor elke $n$ ($n$ een geheel positief getal) er een Boole'se algebra bestaat met precies $2^n$ elementen. Men neme n.l. de Boole'se algebra van alle deelverzamelingen van een verzameling van $n$ elementen. Het is duidelijk dat deze n.l. uit $2^n$ elementen bestaat. We zien dus dat het aantal elementen van een *eindige* Boole'se algebra *niet* willekeurig kan zijn. Hoe is nu de situatie in het geval van oneindige Boole'se algebra's? De vraag is dus deze: bestaat er voor elk oneindig cardinaal getal $\alpha$ een Boole'se algebra $B$ die $\alpha$ elementen heeft [1])? Het is makkelijk te zien dat het antwoord op deze vraag bevestigend is. Zij $V$ n.l. een verzameling die uit $\alpha$ elementen bestaat. De Boole'se algebra beschreven in voorbeeld 1 heeft dan het cardinaal getal $\alpha$, zoals niet moeilijk te zien is.

We willen nu nog even de resultaten van deze paragraaf samenvatten.

1. *Elke eindige Boole'se algebra is isomorf met een verzamelingenalgebra.*
2. *Niet elke Boole'se algebra is isomorf met een verzamelingenalgebra.*
3. *Elke Boole'se algebra is isomorf met een verzamelingenlichaam.*
4. *Het aantal elementen van een eindige Boole'se algebra is altijd van de vorm $2^n$ waar $n$ een geheel positief getal voorstelt. Voor elk positief geheel getal $n$ bestaat een Boole'se algebra waarvan het aantal elementen $2^n$ is.*
5. *Er bestaat voor elk oneindig cardinaal getal $\alpha$ een Boole'se algebra wiens cardinaal getal $\alpha$ is.*

---

[1]) Een eenvoudige inleiding tot de theorie der cardinaalgetallen en in het algemeen tot de verzamelingenleer vindt men in het aardige boekje van Halmos, Naive Set theorie, Nostrand Cy, Princeton N.J.

4. *Verband met de topologie.*

We hebben in de vorige paragraaf gezien dat elke Boole'se algebra isomorf is met een verzamelingenlichaam. Dit betekent dus dat men elke Boole'se algebra als een verzamelingenlichaam kan beschouwen en dat betekent in vele gevallen een belangrijke vereenvoudiging in de bewijsvoering van eigenschappen. In het algemeen kan men zeggen dat dit resultaat het inzicht in de Boole'se algebra's ten zeerste verdiept heeft. Stone heeft echter ook aangetoond, dat Boole'se algebra's niet alleen een verzamelingtheoretisch aspect hebben maar ook een topologisch aspect. We kunnen hier niet in detail gaan maar moeten ons tot een enkele algemene opmerking beperken. Stone heeft n.l. bewezen dat met elke Boole'se algebra $B$ een topologische ruimte correspondeert die we $S(B)$ zullen noemen, zodanig dat elke eigenschap van $B$ vertaalbaar is in een topologische eigenschap van $S(B)$. Omgekeerd kan elke topologische eigenschap van $S(B)$ vertaald worden in een (algebraïsche) eigenschap van $B$. Deze methode is gebleken enorm belangrijk te zijn in de studie van de Boole'se algebra's. In vele gevallen is het n.l. mogelijk met topologische hulpmiddelen een stelling over Boole'se algebra's veel eenvoudiger te bewijzen dan met slechts algebraïsche hulpmiddelen. Men zou eigenlijk kunnen zeggen, dat men de Boole'se algebra beter „ziet" door naar de corresponderende ruimte te „kijken". Omgekeerd heeft de studie der Boole'se algebra's ook geleid tot nieuwe topologische onderzoekingen. Aan de andere kant moet ook opgemerkt worden dat de topologische methode ook zijn grenzen heeft en dat is vooral het geval, indien men zich bezig gaat houden met oneindige operaties in Boole'se algebra's waarover we in de volgende paragraaf enige opmerkingen zullen maken.

Een verdere behandeling van dit uiterst belangrijke aspect der theorie der Boole'se algebra's moeten we helaas achterwege laten, omdat dit buiten het bestek van dit artikel zou vallen. De belangstellende lezer zij verwezen naar de literatuur.

5. *Oneindige operaties. Volledige Boole'se algebra's.*

We zullen in deze paragraaf enige nieuwe begrippen invoeren die tot een zeer belangrijke uitbreiding van de theorie der Boole'se algebra's geleid hebben. De meeste van de moderne onderzoekingen houden zich eigenlijk met deze nieuwe begrippen bezig.

We herinneren de lezer eraan dat indien $x$ en $y$ twee elementen van een Boole'se algebra $B$ zijn dat $x+y$ het supremum van $x$ en $y$ is en dat $xy$ het infimum van $x$ en $y$ is (paragraaf 2). Kort gezegd

betekent dit, dat $x+y$ het kleinste van alle elementen is die groter zijn dan $x$ en $y$, terwijl $xy$ het grootste van alle elementen is, die kleiner zijn dan $x$ en $y$ („groter" betekent hier natuurlijk „groter of gelijk" en „kleiner" betekent „kleiner of gelijk"). Het is niet moeilijk te zien dat indien $S$ een eindige deelverzameling van $B$ is, dat dan de som van alle elementen van $S$, die we door $\sum S$ zullen voorstellen, het supremum van alle elementen van $S$ is. Eveneens is het produkt van alle elementen van $S$, voorgesteld door $\Pi S$, het infimum van alle elementen van $S$.

We kunnen nu de vraag stellen of er ook Boole'se algebra's bestaan met de eigenschap dat *elke* (dus ook de oneindige) deelverzameling een supremum en een infimum heeft. We bedoelen hier natuurlijk met „supremum" weer het volgende. Zij $S$ een deelverzameling van $B$. Het element $x$ is het supremum van $A$ indien $x \geqq a$ voor elk element $a$ van $S$ en indien $z \geqq a$ voor elk element $a$ van $S$ impliceert dat $z \geqq x$. Op dezelfde wijze wordt het infimum van $S$ gedefinieerd en we zien dus dat deze begrippen eenvoudig uitbreidingen zijn van dezelfde begrippen voor eindige verzamelingen $S$. Indien zo'n supremum bestaat dan wordt dit weer aangeduid met $\sum S$. Analoog wordt het infimum (als dit bestaat) door $\Pi S$ aangeduid. Het antwoord op bovenstaande vraag is natuurlijk bevestigend omdat het onmiddellijk duidelijk is dat elke verzamelingenalgebra deze eigenschap heeft, omdat elke verzameling van deelverzamelingen van een verzameling $V$ een supremum heeft (n.l. de verzamelingtheoretische vereniging) en een infimum (n.l. de verzamelingtheoretische doorsnede). We zullen nu de volgende definitie geven.

Een Boole'se algebra is *volledig* indien *elke* verzameling elementen een supremum (som) en een infimum (produkt) heeft.

(De lezer trachte het volgende te bewijzen: Indien elke verzameling elementen van een Boole'se algebra $B$ een som heeft, dan is $B$ volledig.)

We hebben dus gezien dat elke verzamelingenalgebra volledig is. In het bijzonder is elke eindige Boole'se algebra volledig. Het is nu natuurlijk dat we de volgende vraag stellen. Is elke volledige Boole'se algebra isomorf met een verzamelingenlichaam? We hebben n.l. gezien dat in het algemeen een oneindige Boole'se algebra niet isomorf is met een verzamelingenlichaam, maar we zouden kunnen vermoeden dat de voorwaarde van volledigheid impliceert dat de Boole'se algebra dan wèl isomorf is met een verzamelingenlichaam. Dit is echter niet het geval. Men kan b.v. bewijzen dat de Boole'se algebra van Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van het een-

heidsinterval modulo deelverzamelingen van Lebesgue-maat 0 (tweede geval van voorbeeld 6) volledig is. Maar deze algebra is niet atomistisch en kan dus niet isomorf met een verzamelingen-algebra zijn. Aan de andere kant is het niet te moeilijk te bewijzen dat een volledige Boole'se algebra $B$ isomorf met een verzamelingen-lichaam is, dan en slechts dan als $B$ atomistisch is. We merken op dat er ook andere zeer interessante gelijkwaardige voorwaarden zijn, opdat een volledige Boole'se algebra isomorf zij met een verzamelingenalgebra, maar hiervoor moeten we weer naar de literatuur verwijzen. We merken ook nog op dat de Boole'se algebra van voorbeeld 1 niet volledig is (aangenomen dat $V$ oneindig is). Dit is niet te moeilijk om te bewijzen. Moeilijker is het te bewijzen dat de Boole'se algebra van voorbeeld 5 niet volledig is (ook weer aangenomen dat $V$ oneindig is), maar het bewijs maakt toch slechts van elementaire hulpmiddelen gebruik.

Tenslotte willen we nog op het volgende wijzen. Neem aan dat $B$ een volledige Boole'se algebra is. We weten dat er een verzamelingenlichaam $\mathfrak{X}$ van deelverzamelingen van een verzameling $V$ bestaat zodanig dat $B$ isomorf is met $\mathfrak{X}$. Zij nu $S$ een *eindige* verzameling elementen van $B$ en zij $S'$ de corresponderende verzameling elementen van $\mathfrak{X}$. We weten dan uit de representatietheorie dat het isomorfe beeld van de som van de elementen van $S$ de vereniging van de elementen van $S'$ is. Dit belangrijke feit geldt echter in het algemeen niet meer als $S$ oneindig is. Dus het isomorfe beeld van de som van een oneindige verzameling $S$ van elementen van $B$ zal in het algemeen niet de vereniging van de elementen van de corresponderende verzameling $S'$ zijn, maar in het algemeen een deelverzameling van $V$ die groter is dan de vereniging van de elementen van $S'$. Dit betekent dus dat in vele gevallen de gewone representatietheorie niet toereikend is indien men met volledige Boole'se algebra's heeft te maken en in deze gevallen moeten dan ook diepere methodes ontwikkeld worden.

### 6. *σ-volledige Boole'se algebra's. Maatalgebra's.*

We hebben in de vorige paragraaf de *volledige* Boole'se algebra's besproken; dat zijn dus de Boole'se algebra's met de eigenschap dat elke verzameling elementen een som en een produkt heeft. Door deze voorwaarde te verzwakken verkrijgen we een klasse Boole'se algebra's die een belangrijke rol speelt voornamelijk in de maattheorie. D.i. de klasse van de *σ-volledige Boole'se algebra's.*

Een Boole'se algebra $B$ is *σ-volledig,* indien elke deelverzameling van $B$ die uit hoogstens aftelbaar vele elementen bestaat een som

en een produkt heeft. (Met „hoogstens aftelbaar" bedoelen we dat de verzameling een cardinaalgetal heeft, dat hoogstens dàt van de verzameling der gehele getallen is.)

Het is duidelijk, dat elke volledige Boole'se algebra $\sigma$-volledig is. Een voorbeeld van een Boole'se algebra die $\sigma$-volledig is, maar niet volledig, is de volgende. Zij $R$ de verzameling der reële getallen. Zij $\mathfrak{X}$ de verzameling van deelverzamelingen $A$ van $R$ zodanig, dat òf $A$ òf $A^-$ hoogstens aftelbaar is. Het is niet te moeilijk te bewijzen, dat $\mathfrak{X}$ $\sigma$-volledig is, maar niet volledig. Een voorbeeld ontleend aan de maattheorie is de Boole'se algebra $L$ van Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van het eenheidsinterval (voorbeeld 6). Eveneens kan men bewijzen, dat de Boole'se algebra $L/L_0$ $\sigma$-volledig is, maar we zullen later zien dat deze zelfs volledig is.

In de vorige paragraaf hebben we de vraag gesteld of elke volledige Boole'se algebra isomorf is met een verzamelingenlichaam dat bestaat uit alle deelverzamelingen van één verzameling. Zulk een verzamelingenlichaam wordt ook wel een *volledig* verzamelingenlichaam genoemd. We hebben gezien, dat dit in het algemeen niet het geval is. Een soortgelijke vraag kan voor $\sigma$-volledige Boole'se algebra's gesteld worden. Daartoe voeren we eerst een nieuw begrip in.

Zij $\mathfrak{X}$ een verzamelingenlichaam. Veronderstel dat elke deelverzameling $S$ van $\mathfrak{X}$ die uit hoogstens aftelbaar vele elementen bestaat de eigenschap bezit dat de verzamelingtheoretische vereniging en doorsnede van $S$ ook tot $\mathfrak{X}$ behoren. In dit geval zeggen we dat $\mathfrak{X}$ een *$\sigma$-volledig verzamelingenlichaam* is.

We merken op dat als een verzamelingenlichaam $\mathfrak{X}$ $\sigma$-volledig is als een Boole'se algebra, dat daaruit nog niet hoeft te volgen dat $\mathfrak{X}$ ook een $\sigma$-volledig verzamelingenlichaam is. Inderdaad is dat in het algemeen niet het geval zoals uit onderstaande beschouwing zal volgen.

De vraag die nu gesteld kan worden is de volgende. Is elke $\sigma$-volledige Boole'se algebra isomorf met een $\sigma$-volledig verzamelingenlichaam?

Het blijkt, evenals in het analoge geval van de *volledige* Boole'se algebra's, dat het antwoord op deze vraag *ontkennend* is.

Een voorbeeld van een $\sigma$-volledige Boole'se algebra, die niet isomorf is met een $\sigma$-volledig verzamelingenlichaam, is het volgende. Zij $R$ de verzameling der reële getallen. We „identificeren" (in de zin van voorbeeld 5) twee deelverzamelingen van $R$ indien ze op hoogstens aftelbaar vele elementen samenvallen. Men kan dan bewijzen dat men weer een Boole'se algebra verkrijgt die $\sigma$-volledig

is, maar die echter niet isomorf is met een $\sigma$-volledig verzamelingenlichaam.

We hebben dus gezien dat niet elke $\sigma$-volledige Boole'se algebra isomorf is met een $\sigma$-volledig verzamelingenlichaam.

In 1948 heeft Loomis een uiterst belangrijke stelling bewezen, die we hier vermelden willen. (In de literatuur wordt deze stelling meestal als de stelling van Loomis aangeduid, maar de stelling was ook gepubliceerd en bewezen onafhankelijk van Loomis door Sikorski in hetzelfde jaar.)

Teneinde deze stelling te kunnen formuleren dienen we eerst een nieuw begrip in te voeren.

Zij $B$ en $B'$ Boole'se algebra's. Een afbeelding $h$ van $B$ in, of òp $B'$ wordt een *homomorfe* afbeelding genoemd indien

$$h(x+y) = h(x)+h(y)$$
$$h(xy) = h(x)h(y)$$
$$(h(x))^- = h(\bar{x})$$

(We merken op dat $h$ een *isomorfe* afbeelding is (zie paragraaf 3) indien $h$ éénéénduidig is).

We beschouwen nu het bijzondere geval dat $B$ en $B'$ beide $\sigma$-volledig zijn. Een homomorfe afbeelding $h$ van $B$ in, of òp $B'$ wordt nu *$\sigma$-volledig* genoemd, indien bovendien voor elke aftelbare verzameling elementen van $B$ het volgende geldt:

$$h(\sum_{i=1}^{\infty} x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i)$$

(Het is niet te moeilijk te bewijzen dat dan ook geldt:

$$h(\prod_{i=1}^{\infty} x_i) = \prod_{i=1}^{\infty} h(x_i))$$

De *stelling van Loomis-Sikorski* luidt nu als volgt:

*Elke $\sigma$-volledige Boole'se algebra is een $\sigma$-volledig homomorf beeld van een $\sigma$-volledig verzamelingenlichaam.*

We willen deze beschouwingen beëindigen met een enkele opmerking over *maten* op Boole'se algebra's.

Zij $B$ een Boole'se algebra. Een *eindige additieve maat* op $B$ is een reële functie $\mu$ (dus $\mu(x)$ is een reëel getal voor elke $x \varepsilon B$), die voldoet aan de volgende eigenschappen:

$\mu(0) = 0, \mu(1) = 1$ en $\mu(x+y) = \mu(x)+\mu(y)$ voor elk tweetal elementen $x$ en $y$ waarvoor $xy = 0$.

$\mu$ wordt *positief* genoemd indien $\mu(x) = 0 \rightarrow x = 0$.

In de maattheorie wordt een belangrijke rol gespeeld door een

speciaal soort eindige additieve maten n.l. de *aftelbare additieve maten.*

Zij $B$ een $\sigma$-volledige algebra. Een *aftelbare additieve* maat $\mu$ is een eindig additieve maat op $B$ die bovendien voldoet aan de volgende eigenschap

$\mu(\sum_{i=1}^{\infty} x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i)$ voor elke aftelbare verzameling elementen $(x_i, i = 1, 2, \ldots)$ zodanig dat $x_i x_j = 0$ voor $i \neq j$.

In de maattheorie van Boole'se algebra's worden Boole'se algebra's met maten onderzocht. Men kan o.a. bewijzen dat op elke Boole'se algebra eindige additieve maten gedefinieerd kunnen worden. Maar dat is niet het geval als men bovendien eist dat de maat *positief* is. Evenmin kan op elke $\sigma$-volledige Boole'se algebra een *positieve* aftelbare additieve maat gedefinieerd worden. Natuurlijk is de karakterisering van diè Boole'se algebra's die wel zulke maten toelaten een belangrijk probleem, dat echter slechts ten dele opgelost is.

Een klassiek voorbeeld van een $\sigma$-volledige Boole'se algebra met een aftelbare additieve maat is de Boole'se algebra $L$ van Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van het eenheidsinterval met Lesbesgue-maat.

Een interessant resultaat zij hier tenslotte nog vermeld. Uitgaande van $L$ en de Lesbesgue-maat $\mu$ kan men op $L/L_0$ op een natuurlijke wijze een aftelbare additieve maat definiëren die bovendien *positief* is.

Een $\sigma$-volledige Boole'se algebra waarop een aftelbare additieve maat gedefinieerd is, die bovendien *positief* is wordt een *maatalgebra* genoemd. Wecken heeft nu het belangrijke resultaat bewezen dat *elke maatalgebra volledig is.* Hieruit volgt in het bijzonder dat de Boole'se algebra van Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van het eenheidsinterval modulo deelverzamelingen van Lebesgue maat 0, dus de algebra $L/L_0$, een volledige algebra is.

## LITERATUUR VOOR VERDERE STUDIE.

[1] E. W. Beth, The Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959.

[2] G. Birkhoff, Lattice Theory, Am. Math. Soc. Coll. Publ. New York, 1948. (revised edition)

[3] Ph. Dwinger, An introduction to Boolean algebras. Abh. Math. Sem. Un. Hamburg. Physica-Verlag Würzburg. (verschijnt dit jaar).

[4] D. A. Kappos, Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und -Räume. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.

[5] R. Sikorski, Boolean algebras. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.

[6] J. E. Whitesitt, Boolean algebra and its applications. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass. USA; London, England, 1961.

# EEN INSTRUCTIE UIT HET JAAR 1817

door

H. K. Schippers

DRACHTEN

Het in menig opzicht belangwekkende „Register van het Archief van Franeker" raadplegend (het werd bewerkt door mr. I. Telting en na diens dood in druk uitgegeven te Franeker in het jaar 1867.), viel mijn oog op volgnummer **3233**: „Bepalingen rakende de Latijnsche School, vastgesteld door Curatoren. 25 Julij 1816. — Instructie voor den Onderwijzer in de Wiskunde. 11 Februarij 1817."

Het desbetreffende stuk, met behoorlijk nette hand overgeschreven uit het officiële notulenboek doch ontsierd door enige misspellingen, kwam mij curieus genoeg voor om er een plaatsje voor te vragen in ons tijdschrift. Het volgt hier in z'n geheel.

Instructie voor den Onderwijzer in de Wiskunde
aan de Latijnsche Scholen te Franeker.

1

De onderwijzer zal gehouden zijn twee maal ter weke les te geven, in het schoolgebouw, aan alle de leerlingen te zamen, welke de Latijnsche Scholen frequenteren, telkens een vol uur, en wel des woensdags en Saterdags voordemiddags van elf tot twaalf uuren, het geheele jaar door, met uitzondering alleen van de vacantien bij de wet bepaald.

2

Hij zal gedurende dien tijd zorge dragen voor de goede orde en Stilte in de Schoolen, overeenkomstig de oplettendheid, welke bij een onderwijs van deze aard noodzakelijk gevorderd wordt.

3

Hij zal zich in het onderwijs niet mogen ophouden bij de gewone Anthmetica (*sic*).

4

Maar hij zal in de eerste plaats een grondig en volledig onderwijs geven in de Decimaal rekening daarbij de Leenrijze van Aniae (*lees:* leerwijze van Aeneae) volgende

5

Dan weder een grondige verklaring van het nieuwe Stelsel van Maten en Gewigten, alsmede van het nieuwe Muntstelsel

6

En als dan de Decimaalrekening leren toepassen op gemelde Stelsels van Maten en gewigten en Muntspecien; en uit hoofde van het belang voor het dagelijkse leven, de leerlingen oefenen in de wederkeerige Reductien, met betrekking tot de door het nieuwe stelsel vervangen wordende, meest gebruikelijke oude maten, gewigten en geldspecien.

7

Hierna zal hij eerst met zijne leerlingen tot de beginselen der Meetkunde mogen overgaan, echter niet, dan na vooraf dezelve onderrigt en geoefend te hebben, ten minste wat de zoogenaamde vier specien betreft, in het rekenen met letters in plaats van cijffers, en het gebruik der gewone Algebraische tekens

8

In het Meetkundig onderwijs zal hij beginnen met hun alle meetkundige figuren duidelijk te leren kennen, vervolgens derzelver eenvoudigste eigenschappen verklaren, en daarbij allengskens gewennen aan strenge demonstratie, tevens de leerlingen zich latende oefenen in de gemakkelijkste werkstukken, en in het teekenen der figuren, en voorts, voor het gebruik dagelijkschen levens, de leer van de afmetingen der vaste ligchamen (*lees:* inhoudsformules) daarbij voegen

9

Eindelijk zal hij de leerlingen der bovenste Classen onderwijzen in de beginselen der wiskundige aardbeschrijving en het gebruik der Globe

10

Het geheele wiskundig onderwijs, voor de Latijnsche scholen, dus tot drie hoofddeelen gebragt wordende, 1e dat den Decimaalrekening met hare toepassing voor de benedenste Classen; 2e het Meetkundig, in alle de volgende steeds wordende voortgezet; 3e het in de beide bovenste daarbij gevoegde onderwijs in de wiskundige aardbeschrijving en het gebruik der globe, zal de onderwijzer deeze verdeelingen nauwkeurig onderscheiden

11

Hij zal tweemaal in het Jaar, tegen het winter en zomer examen, telkens acht dagen tevoren, aan Curatoren inleveren een Staat zijner leerlingen, met opgave tot welke der drie afdeelingen elk behooren, en met bijzondere gedeeltens hij zich bezig houde

12

Voorts zal de onderwijzer op de bepaalde dagen van gemelde examina, of wanneer Het Curatoren (*sic*) zulks op andere tijden ook mogen goedvinden, voor HH: Curatoren alle zijne leerlingen in de bijzondere vakken examineeren.

13

Bijzonder en tijdelijk Artikel

Ten einde het bovengemeld onderwijs trapsgewijze kunne worden ingevoerd, zal de onderwijzer tot het eerstkomend Examen in Julij 1817, of, zoo veel langer als HH: Curatoren zullen goedvinden, zich met alle de leerlingen slechts alleen bezighouden met voorgeschrevene bij Art. 4, 5, en 6 der instructie zonder verder te gaan.

14

Curatoren behouden aan zich deze instructie te interpreteren, en naar bevind nader te amplieren of altereren.

Deze instructie is opgemaakt bij Heeren Curatoren der Latijnsche School den 22 febr 1817 en uit derzelver notel boek gecopieerd.

(w.g.) secr. P. J. Romar

# KROMMEN BIJ UITZET-IJZERS

door

Drs. W. DRIJVERS en Ir. H. MULDER

BREDA

Een uitzetijzer ($RS$) is een stang, om een draaiend raam ($RQ$) met $Q$ als scharnier bij $P$ vast te zetten (fig. 1).

Soms krast het eind $S$ bij herhaaldelijk gebruik van het raam een kromme in de verf van de vensterbank.

We onderzoeken de aard van de door $S$ beschreven kromme.

Hierbij wordt $RS = a$ gesteld, verder $PQ = b$ en $RQ = c$. Wanneer men hierbij $c$ variabel stelt, krijgt men een fascinerende reeks krommen, nog weer bestaande uit 2 groepen. Een scheidingskromme vormt de overgang tussen de 2 groepen.

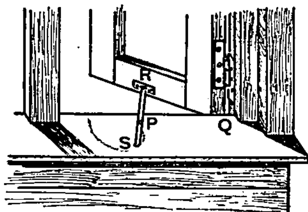



Fig. 1.

In fig. 9 zijn ze aangegeven, waarbij $a = 8$, $b = 10$ en $c$ variabel.

Algemeen moet gelden

$$|b-a| \leqq c \leqq a+b$$

of hier

$$2 \leqq c \leqq 18$$

We zoeken het verband tussen $PS(= r)$ en $\angle QPS(= \varphi)$.

Op deze wijze verschijnt een functieverband in poolcoördinaten.

I. Stel $c > b$. Het is nu mogelijk dat:

1. $\varphi' < 90°$ of $\varphi > 90°$ indien het raam voldoende ver open is. In fig. 2 is nu af te lezen:

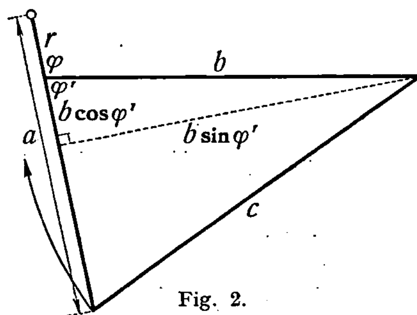



Fig. 2.

$$r = a - b\ \cos\ \varphi' - \sqrt{(c^2 - b^2\ \sin^2 \varphi')}$$

of

$$r = a + b \cos \varphi - \sqrt{(c^2 - b^2 \sin^2 \varphi)}$$

2. $\varphi' = \varphi = 90°$ indien het raam verder dichtdraait (fig. 3). Nu geldt:

$$r = a - \sqrt{(c^2 - b^2 \sin^2 \varphi)}$$

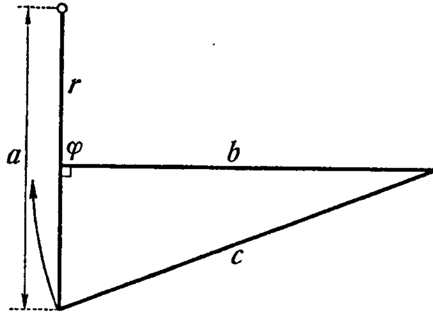



Fig. 3.

3. $\varphi' > 90°$ of $\varphi < 90°$ indien het raam bijna dicht is (fig. 4). Nu geldt:

$$r = a + b \cos \varphi - \sqrt{(c^2 - b^2 \sin^2 \varphi)}$$

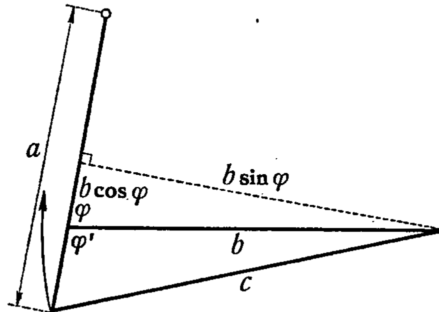



Fig. 4.

Samenvattend kan men zeggen, dat indien $c > b$ steeds geldt:

$$r = a + b \cos \varphi - \sqrt{(c^2 - b^2 \sin^2 \varphi)}$$

II. Stel $c = b$ dan (fig. 5):

$r = a - 2b \cos \varphi'$ (waarbij $r \leqq a$) en als het raam dicht is: $r = a$ of wel $r = a + 2b \cos \varphi$ en $r = a$.

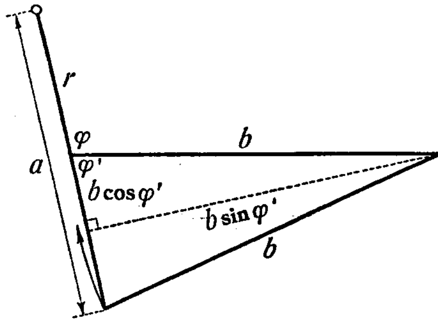



Fig. 5.

Kennelijk is de eerste een bijzonder geval van:

$$r = a + b \cos \varphi + \sqrt{(c^2 - b^2 \sin^2 \varphi)}$$

en de tweede van:

$$r = a + b \cos \varphi - \sqrt{(c^2 - b^2 \sin^2 \varphi)}$$

III. Stel $c < b$. Hierbij is steeds $\varphi' < 90°$ of $\varphi > 90°$. Hier zijn de volgende gevallen te onderscheiden:

1. $\alpha < 90°$ indien het raam voldoende ver open is. [1])
Af te lezen in fig. 6:

$$r = a - b \cos \varphi' - \sqrt{(c^2 - b^2 \sin^2 \varphi')}$$

of

$$r = a + b \cos \varphi - \sqrt{(c^2 - b^2 \sin^2 \varphi)}$$

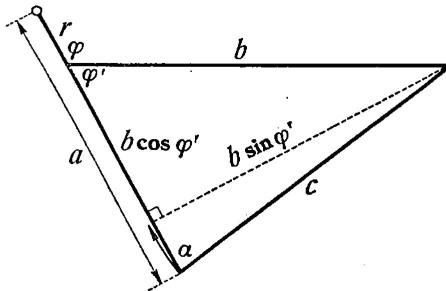



Fig. 6.

2. $\alpha = 90°$ (fig. 7) bij verder dichtdraaien $r = a - b \cos \varphi' = a + b$ $\cos \varphi$ dus ook hier is nog geldig:

$$r = a + b \cos \varphi - \sqrt{(c^2 - b^2 \sin^2 \varphi)}$$

[1]) $\alpha = \angle PRQ$

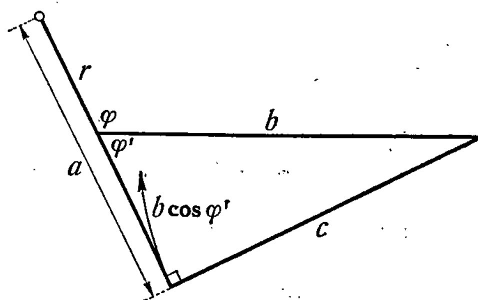



Fig. 7.

3. $\alpha > 90°$ (fig. 8) indien het raam bijna dicht

$$r = a - b\cos\varphi' + \sqrt{(c^2 - b^2\sin^2\varphi')}$$

of

$$r = a + b\cos\varphi + \sqrt{(c^2 - b^2\sin^2\varphi)}$$

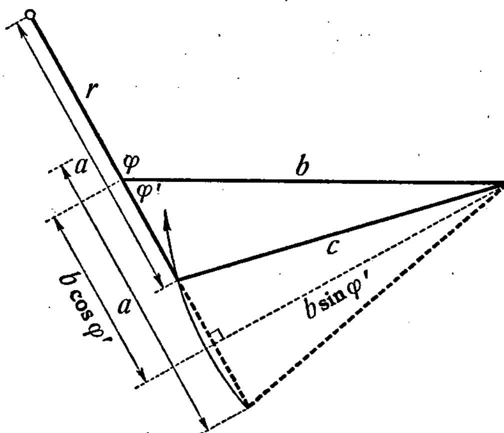



Fig. 8.

Samenvattend kan men zeggen dat, indien $c < b$ beide formules gelden:

$$r = a + b\cos\varphi \pm \sqrt{(c^2 - b^2\sin^2\varphi)}$$

(elk teken voor één deel van de krommen).

Het is interessant te vragen bij welke waarden van $r$ en $\varphi$ de tekenwisseling plaatsheeft. Dit geschiedt indien $c = b\sin\varphi'$ dus de meetkundige plaats van de omkeerpunten is:

$$r = a + b\cos\varphi. \quad (\text{waarbij } r \leqq a)$$

Dat bij $c < b$ bij een bepaalde $\varphi$ 2 waarden voor $r$ behoren is overeenkomstig het 5e constructiegeval in de planimetrie.

Tenslotte nog een aantal opmerkingen.

1. Mechanisch krijgt men slechts de helft van de krommen te zien. Draait men het raam naar de andere zijde open, dan ontstaat het deel, symmetrisch ten opzichte van de „$\varphi = 0$ lijn". Voor 2 krommen is dit deel gestippeld in fig. 9.

2. De raaklijnrichting in $P$ (bij raam geheel open) wordt gegeven door de dan aanwezige stand van $RS$.

3. Evenzo bepaalt $RS$ de raaklijnrichting in de omkeerpunten, waar $c = b \sin \varphi$.

4. Indien het raam gesloten is ($\varphi = 0°$ of $\varphi = 180°$) staat de raaklijn in $S$ loodrecht op de „$\varphi = 0$ lijn". Dit is een gevolg van de symmetrie.

5. De raaklijn in $P$ is slechts loodrecht voor de kromme waarbij $c^2 = a^2 + b^2$ in ons geval $c = 12,8$.

6. Zodoende liggen krommen, waarvoor $c^2 \geqq a^2 + b^2$ geheel in het eerste kwadrant.

7. Krommen met $c < b$ liggen geheel in het tweede quadrant en indien $b^2 < c^2 < a^2 + b^2$ in beiden.

8. Als $a > b + c$ gaan de krommen niet meer door $P$ en hebben bij snijding met de „$\varphi = 0$ lijn" in beide punten loodrechte raaklijnen.

9. De omkeerkromme $r = a + b \cos \varphi$ raakt in de oorsprong de $S$-kromme waarvoor geldt $c^2 = b^2 - a^2$ (hier $c = 6$).

10. De grootste openingshoek voor het raam is:

$$Q = \text{bg} \cos \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

Het raam kan 180° draaien als $a \geqq b + c$.

11. Als het raam gesloten is geldt:

$$r = a + (b - c) \text{ of als } b = c \text{ geldt } r = a.$$

Dit laatste is mechanisch gesproken wat vreemd, maar meetkundig juist.

12. Zowel de scheidingskromme $r = a + 2b \cos \varphi$ als de omkeerkromme $r = a + b \cos \varphi$ zijn slakkenhuiskrommen van Pascal; alle andere krommen echter niet.

De gehele behandeling van deze krommen bij uitzetijzers is een fraaie toepassing van goniometrische en planimetrische eigenschappen, ongetwijfeld onze beste leerlingen geschikte stof tot speuren en voorstellen gevend.

Opvallend is ook de bijzonder fraaie loop der krommen, strevend naar evolutie en vormverandering, waarbij $r = a + 2b \cos \varphi$ de soorten scheidt en $r = a$ het geheel als een lijst omgeeft.

Vergelijk tenslotte deze krommen met de natuurlijke vormen van appelen, peren en uien en de gelijkenis is treffend.

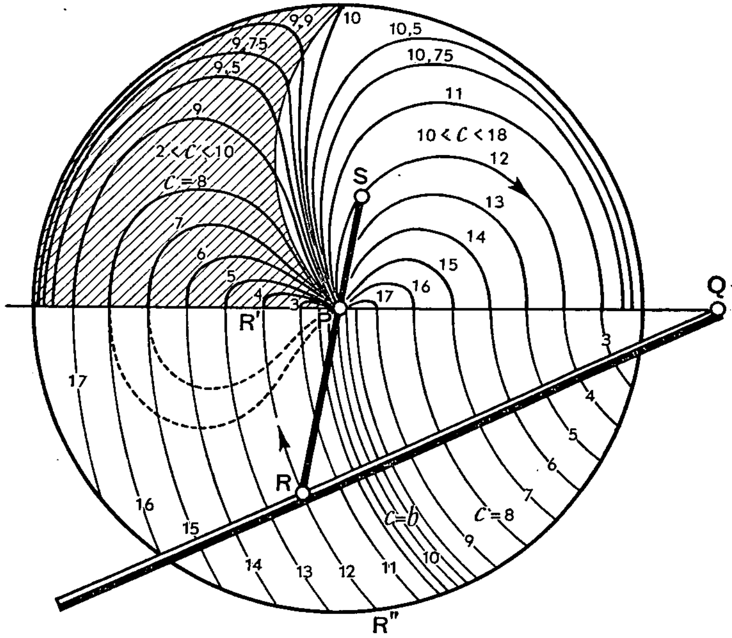



Fig. 9.

## ONTVANGEN BOEKEN

Van P. Noordhoff N.V.—Groningen:

Dr. J. H. Raat, *Natuurkunde-practicum*, II: Licht, geluid, magnetisme, elektriciteit; 46 blz., Pr. ƒ 1.90.

P. Wijdenes, *Nieuw Rekenboek* voor het voortgezette rekenonderwijs, met medewerking van M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, 2e stukje, 9e dr., Prijs ƒ 2,50.

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, *Nieuw Meetkundeboek*, II, 10e dr., Prijs ƒ 2,25.

Wijdenes en Bruinshoofd, *Meetkunde voor het lager technisch onderwijs* en voor eenvoudige technische opleidingen, 2e stukje, 7e dr., Prijs ƒ 2,25.

Van J. B. Wolters—Groningen:

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Tekenatlas*, behorende bij Stereometrie, 7e dr., Prijs ƒ 0.75.

Dr. L. N. H. Bunt, *Statistiek voor het VHMO*, 2e dr., ing. ƒ 7,90, geb. ƒ 8,90.

Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen, *Nieuwe Vlakke Meetkunde* III, 3e dr., ing. ƒ 3,25, geb. ƒ 3,90.

Van Thijns wiskundige leergang, *Leerboek der vlakke meetkunde* II, door I. Abram, 22e dr., ing. ƒ 3,25.

# BOEKBESPREKING

R. A. Silverman, *Linear Algebra and Group Theory*, London, McGraw-Hill, 1961, 464 blz., 97 s.

Dit keurig uitgegeven boek bevat een selectie van onderwerpen uit Prof. V. I. Smirnov's 6-delig standaardwerk: *Course of Higher Mathematics*, oorspronkelijk uitgegeven in het Russisch, vertaald, aangepast en aangevuld door Silverman en anderen.

Het gevolg is, dat bepaalde onderwerpen van de grond af worden opgebouwd en slechts kennis vereisen van de elementaire wiskunde, daarentegen andere hoofdstukken bekendheid veronderstellen met onderwerpen, die vermoedelijk in de andere delen behandeld zijn. Recensent heeft vele uren met intens genoegen in dit prachtige werk zijn kennis verrijkt en zal nog vele uren hieraan toevoegen. Voor hen die belang stellen in een uitvoerige behandeling van de hieronder genoemde onderwerpen, moge de opsomming van de inhoud van dit boek een aansporing zijn tot aanschaffing.

Het boek is in drie delen verdeeld. Deel I behandelt determinanten en dan alleen die stellingen, die voor de volgende hoofdstukken van belang zijn, waarna zoals te verwachten: systemen van lineaire vergelijkingen. Deel 2 behandelt dan matrixtheorie onderverdeeld in: lineaire transformaties, kwadratische vormen, ruimten met oneindig veel dimensies en reductie van matrices tot kanonieke vorm. Deel 3 bespreekt dan de groepentheorie. Enige voorkennis is hiervoor echter wel gewenst. En tenslotte zijn alle hoofdstukken afgesloten met enige tientallen met zorg uitgekozen vraagstukken, terwijl het boek besluit met een lange lijst van aanwijzingen en uitkomsten.

W. Burgers

W. J. Brandenburg en L. Schrier, *Inleiding in de Meetkunde I*, J. B. Wolters, Groningen 1961. f. 3.25.

Volgens de titel is dit een eerste deeltje. De gehele inleiding zal dus blijkbaar uit meerdere deeltjes bestaan. Hoeveel dit er zullen zijn, staat echter nergens aangegeven. Dit deeltje is bestemd voor de eerste klassen van het v.h.m.o.

Laten we direct opmerken dat de uitwendige verzorging van het boekje uitstekend is. De figuren zijn duidelijk.

Een paar bezwaren: a) Zou het geen aanbeveling verdienen om op bladz. 13 behalve de definitie van de rechthoekige ook die van de stomp- en scherphoekige driehoek te geven?

b) Zou het voor de leerlingen m.i. niet heldere betoog van paragraaf 24 op blz. 30 niet vermeden hebben kunnen worden, door hun eerst in het algemeen bij te brengen wat overeenkomstige hoeken zijn enz. en pas daarna op de evenwijdige lijnen over te gaan?

c) Waarom verdient het Engelse teken $\rightarrow$ de voorkeur boven $\therefore$?

d) Waarom worden geen bewijzen gegeven van de eigenschappen van parallellogram en trapezium? (Ook in hoofdstuk XVI "Opbouw van de vlakke meetkunde; bewijzen van stellingen "ontbreken deze).

Het boekje doorbladerend, heb ik nergens sporen van een nieuwe opzet of van een nieuwe behandelingswijze gevonden. Zodat ik me wel afgevraagd heb waarom men dit boek heeft laten verschijnen. Of blijkt dat bij de volgende deeltjes?

J. F. Hufferman

Herbert Meschkowski, *Wandlungen des mathematischen Denkens*, Zweite, durchgesehene und erweiterte Auflage, 141 blz., geb., DM 12,80; Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig; 1960.

Deze „Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik" bevat een reeks boeiende voordrachten die ten doel hebben ook bij niet-wiskundigen belangstelling te wekken voor mathematische denkmethoden.
Er wordt o.a. gesproken over de grondslagen der Griekse wiskunde, over niet-euclidische meetkunde, over de problematiek van het oneindige, over verzamelingsleer, over intuïtionisme, formalisme en mathematische logica, over grondslagenonderzoek. Als aanhangsel is opgenomen een opstel over: „Menschenbildung im Zeitalter der Automatisierung", waarin de auteur te kennen geeft dat hij huivert voor een wereld „in die der gebildete Jugend nicht mehr interessiert ist an den alten groszen Menschheitsfragen, sondern nur noch daran, wie man noch bessere und noch schnellere Flugzeuge, Motorräder und Raketen bauen kann". Hij onderzoekt in hoeverre de wis- en natuurkundige vakken tot centrale vakken van een schooltype dat algemene vorming nastreeft, gemaakt kunnen worden. Hij propageert een „Mathematisches oder naturwissenschaftliches Gymnasium", waarin het onderwijs in Latijn door dat in een moderne taal wordt vervangen, terwijl op het „sprachliches Gymnasium" niet de technische zijde van wis- en natuurkunde, maar de fundamentele problemen dezer vakken in cultuurhistorische samenhang behandeld dienen te worden.
We bevelen dit werkje in de belangstelling van de lezers van Euclides aan.

Joh. H. Wansink

A. Leen, *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19e en het begin van de 20ste eeuw*, Academisch proefschrift, Vrije Universiteit, 195 blz.; 13 oktober 1961; J.B.Wolters, Groningen.

Vele onderwijzers en leraren zullen zich interesseren voor de veranderingen die het rekenonderwijs in de lagere school, dat door zovele traditionele factoren mede is bepaald, in de jongste tijd heeft ondergaan. Welke zijn de krachten waardoor die veranderingen werden veroorzaakt?
Deze vraag ligt ten grondslag aan de dissertatie van Dr. Leen, die ons een historisch overzicht geeft van de ontwikkeling van het rekenonderwijs in Nederland en de laatste anderhalve eeuw. De auteur constateert in zijn eerste hoofdstuk, dat we tussen de opbouw en de didaktiek van het onderwijs enerzijds en de sociaal-economische structuur der maatschappij anderzijds een innig verband kunnen constateren. En zijn eerste stelling luidt:
„Meer dan de psychologie is in ons land de sociaal-economische structuur der maatschappij van invloed geweest op de ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school."
Het samengaan van de ontwikkeling op sociaal-economisch gebied en op didaktisch gebied wordt geschetst zonder dat steeds kon worden ingegaan op de vraag, waarom een bepaalde structuur der maatschappij nu juist tot deze didaktiek moest leiden. De inhoud van dit proefschrift is ook voor de wiskundedocent bij het v.h.m.o. van wezenlijke betekenis. Een analoge studie voor de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs op gymnasium en h.b.s. ontbreekt tot dusver in ons land. Maar de wiskundeleraar zal zich stellig interesseren voor de hoofdstukken, waarin de invloed van Pestalozzi en die van Herbart op het rekenonderwijs kritisch worden beschouwd en in die waarin de sociaal-economische structuur van ons land omstreeks 1870 met de strijd om de leerplicht tot 1900 wordt geschetst.Ook wijdt de auteur een afzon-

derlijk hoofdstuk aan school en maatschappij in het begin der 20ste eeuw en aan de grenzenloze verwarring die er in deze tijd op pedagogisch gebied viel waar te nemen. Van de buitenlandse invloeden die in het boek aan de orde komen, noem ik de Duitse (Meraner Vorschläge; Kühnel, Wittmann) en de Belgische (Decroly). Het is ondoenlijk de namen te noemen van alle Nederlandse auteurs van rekenmethoden die door Dr. Leen worden besproken. Wie zich ervoor interesseert, leze het boek zelf. Het wordt door de firma Wolters in de handel gebracht. Prof. Waterink gaf de handelsuitgave een „Woord ten geleide" mee, waaraan we ontlenen:
„Het is mijn overtuiging, dat het boek van Dr. Leen een blijvende waarde heeft, doordien het een zeer goed overzicht geeft over en inzicht geeft in een tijdperk in de ontwikkeling van ons rekenonderwijs, hetwelk thans min of meer afgesloten schijnt, doordien wij, zoals trouwens uit de laatste hoofdstukken van dit boek blijkt, zijn overgegaan naar een andere wijze van benadering van de rekenproblemen dan die welke in de vorige eeuw normaal scheen".
We bevelen het werk van Dr. Leen in de belangstelling van de lezers van Euclides aan.

Joh. H. Wansink

Dr. C. G. Panagakis, *Στοιχεια Μαθηματικων* I (Elementen der wiskunde), 80 blz., 1961.

Dit zojuist verschenen boekje is het eerste deel van een serie boeken voor de middelbare school in Griekenland. Het is bestemd voor leerlingen van de „8th and 9th school grades", dus van 14-15 jaar. Uiteraard zou ik geen ruimte vragen voor een bespreking van dit boek, dat ik niet eens kan lezen, als daar geen bijzondere reden voor was. Het boekje is namelijk gebaseerd op de aanbevelingen van de door de O.E.E.S. ingestelde commissie, die als doelstelling had richtlijnen op te stellen voor modern wiskunde-onderwijs. Men vindt er dan ook achtereenvolgens in behandeld: verzamelingen, geordende paren, cartesisch produkt, de regels van ons rekenkundig systeem, uitspraken met twee variabelen, deelverzamelingen, relaties, functies, doorsnede, vereniging. Al deze begrippen worden toegepast op aritmetische voorbeelden.

Enige jaren geleden heeft de schrijver een toernee door West-Europa gemaakt in opdracht van de Griekse regering om zich daar op de hoogte te stellen van het wiskunde-onderwijs. De opdracht werd verleend, omdat de Griekse regering van mening was, dat Griekenland zich meer diende te industrialiseren en dat daarvoor verbetering van het onderwijs en met name van het wiskunde-onderwijs noodzakelijk was. Het is interessant om aan de hand van dit boekje te zien, dat de Grieken met rasse schreden niet alleen bezig zijn hun achterstand in te halen, maar meteen trachten te verwerkelijken, hetgeen bij ons nog tot de toekomstwensen behoort.

P. G. J. Vredenduin

A. Blaquière, *Mécanique non linéaire*; Gauthier-Villars, Paris, 1960.

De studie van niet-lineaire systemen (dat zijn systemen waarvoor de opgestelde differentiaal-vergelijkingen niet lineair zijn) is voor de ontwikkeling van de moderne fysica en regeltechniek van grote betekenis. Het gaat er om de voorwaarden te vinden waaronder de oplossingen stabiel zijn. Het ligt voor de hand om aansluiting te zoeken bij de bekende oplossingen met eindige amplitude en periode voor lineaire systemen. Blaquière behandelt in zijn 137 bladzijden tellende boek zg. pseudo-sinusoidale systemen, waarbij de oplossing benaderd wordt door reeksontwikkelingen

van trigonometrische functies, in wezen dus door een Fourier-analyse. Bij de uitwerking wordt een grafische voorstellingswijze van de oplossing in het complexe vlak zoals die door Nyquist voor lineaire systemen is ontwikkeld, voor de niet-lineaire systemen uitgebreid.

De schrijver beperkt zich tot de behandeling van de twee problemen, nl. vrije systemen en systemen waarop uitwendige storende invloeden werken. In het laatste geval beschouwt hij zowel periodieke storingen als volkomen willekeurige storingen, mits deze zwak t.o.v. de oscillatie-amplitude zijn.

Het boek is duidelijk geschreven. De tekst wordt vergezeld van 44 figuren, waarvan een groot deel aan de bovenvermelde grafische methode is gewijd. Hier en daar werden in de formules kleine ontsporingen aangetroffen, evenals enkele zetfouten en interpunctieslordigheden in de tekst.

Blaquière heeft een goede, moderne inleiding tot de mathematische behandeling van niet-lineaire systemen geschreven, die voor belangstellenden kan worden aanbevolen.

W. J. Claas

D. Greenspan, *Introduction to partial differential equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1961; 195 blz., 58 s.

De schrijver is er op voortreffelijke wijze in geslaagd een duidelijk, prettig leesbaar boek te componeren zonder concessies ten aanzien van de noodzakelijke strengheid te doen. In een inleiding tot de partiële differentiaalvergelijkingen, die niet te groot van omvang mag zijn, moet een selectie van onderwerpen plaatsvinden. Greenspan kiest de vergelijkingen van de tweede orde, in twee onafhankelijke variabelen, uit en beperkt zich verder tot de vergelijkingen met constante coëfficiënten. Nadat aangetoond is dat deze door een affiene transformatie van de variabelen tot drie standaard-typen kunnen worden teruggebracht, worden deze typen achtereenvolgens besproken (de golfvergelijking, de potentiaalvergelijking en de diffusievergelijking; de laatste vergelijking treedt vaker in de fysica op dan Greenspan met de term „heat equation" suggereert). Speciale aandacht is daarbij besteed aan problemen betreffende begin- en randvoorwaarden. Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan benaderingsmethoden voor het oplossen van vergelijkingen.

Het boek begint met een hoofdstuk, waarin de benodigde grondbegrippen en -stellingen worden ontwikkeld, en vervolgt met een fraaie behandeling van de Fourier-reeksen, voorzover deze bij het oplossen van partiële differentiaal-vergelijkingen nodig zijn.

De theorie wordt voortdurend met instructieve voorbeelden toegelicht. Ieder hoofdstuk wordt besloten met een verzameling opgaven. Al met al een didactisch uitstekend, modern leerboek.

W. J. Claas

Helmut Hasse — Walter Klobe, *Aufgabensammlung zur höheren Algebra* (Sammlung Göschen Band 1082) Walter de Gruyter & Co. 1961. (dritte verbesserte Auflage).

De beide algebradeeltjes van Hasse in de Sammlung Göschen (Band 931, 932) zijn bekend genoeg. Bij de bestudering daarvan is dit opgavenboekje, dat zich op *beide* theoriedeeltjes betrekt buitengewoon instructief en nuttig. Het sluit zich in deze 3e druk aan bij de 4e druk (1957/58) dezer laatstgenoemde werkjes. Het geheel, zowel om de keus van de stof als om de helderheid en strengheid zeer aanbevolen.

J. F. Koksma

Nieuw Leerboek der Algebra mét Vraagstukken voor het V.H.M.O. door E. J. Wasscher, herzien door I. Abram, delen I en II, vierde druk ,Groningen 1961. (Verschenen in van Thijn's Wiskundige Leergang, met medewerking van M.L.Kobus bij de uitgever J.B.Wolters) Prijs: deel I, ing. f. 4,25, geb. f. 4,90; deel II, ing. f. 4,75, geb. f. 5,50.

Op voorzichtige en duidelijke wijze (behoudens op bldz. 10 en 11) is getracht in deel I tot een voor leerlingen bruikbaar stelsel axioma's voor het lichaam der rationale getallen te geraken. In deel II had de structuur van het lichaam der reële getallen wat meer geaccentueerd kunnen zijn. Met de adviezen van de Nomenclatuurcommissie is rekening gehouden. Consequent is het woord rij gebruikt, het woord reeks komt niet voor. Aan het ontwikkelen en onderhouden van rekenvaardigheid is de nodige aandacht besteed. Gelukkig overschrijdt de tekst hier en daar de minimumeisen van het leerplan. Bij het functiebegrip wordt de afbeelding helaas niet genoemd. Op het blad met formules treffen we het volgende aan:,,Def. : Een functie van $x$ is bekend, zodra $x$ gegeven is". Als de meester het de jongens al te gemakkelijk wil maken, dan kunnen er rare dingen gebeuren.

Een paar bladzijden over lineaire programmering zouden het goed gedaan hebben in het hoofdstuk over ongelijkheden.

Misschien verrassen de schrijvers ons daarmee in deel III. Op rug en omslag van de boeken komen wel voor de namen van leergang en uitgever, maar niet die van de auteurs. Een symptoom van de verschuiving van substantiële rationaliteit naar functionele rationaliteit?

H. G. Brinkman

Jacques Bouteloup, *Calcul Matriciel*, Presse universitaire de France, No. 927 uit de serie ,,Que sais je". 126 blz.

Dit boekje geeft in kort bestek de voornaamste stellingen van de matrix-algebra. Het is niet zo zeer bedoeld als leerboek, maar een overzichtelijke samenvatting van stellingen en bewijzen. Oefenmateriaal in de vorm van vraagstukken ontbreekt dan ook. Van de lezer wordt wel ondersteld, dat hij ,,de taal" al spreekt.

Burgers

Andreas Diemer, *Das Wesen der automatisierten elektronischen Datenverarbeitung und ihre Bedeutung für die Unternehmensleitung.* 240 blz. 47 fig. Walter de Gruyter & Co., Berlijn, 1962. Geb. DM 28.

Dit boek is, zoals ook uit de titel blijkt, geschreven voor hen, die te maken hebben met of zich interesseren voor de toepassing van rekenautomaten op het commerciële en administratieve gebied. Voorafgaande aan de bespreking van deze toepassing vindt men een gedeelte, waarin de verschillende technische onderdelen, zoals buizen, halfgeleiders, magneettrommels en kerngeheugens worden beschreven.

Ook wordt de logica van de machines behandeld, terwijl eveneens aandacht wordt besteed aan verschillende codes. Hoewel deze beschrijvingen over het algemeen aanvaardbaar zijn, krijgt men toch hier en daar de indruk dat de schrijver geen wis- of natuurkundige is, maar uit de economische hoek komt. Te meer omdat soms met veel woorden wordt gezegd wat met een formule veel sneller en duidelijker gezegd had kunnen worden. De schrijver heeft nergens vermeld wat zijn functie is.

De toepassing van rekenautomaten, die in het laatste deel van het boek wordt behandeld, heeft voornamelijk betrekking op de besliskunde (operations research).

Het gaat er hierbij om om het optimale produktievermogen voor een onderneming te vinden, waarbij de ervaringen van het verleden verwerkt zijn. Lineaire programmeringsmethoden worden hierbij gebruikt.

Het boek is vermoedelijk in de eerste plaats geschreven om economen iets over rekenmachines en hun toepassingsmogelijkheden te vertellen. De wiskundige zal er minder van zijn gading in aantreffen.

A. I. van de Vooren

# RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

75. Dr. D. N. van der Neut en Dr. P. Bronkhorst maken me attent op de volgende generalisatie van probleem nr 71. Vind twee getallen *a* en *b*, waarvoor geldt

$$\overline{a\ b} = a\,(a+b).$$

Hierin wordt onder $\overline{a\ b}$ het getal verstaan, dat ontstaat door de beide cijferrijen, waaruit *a* en *b* bestaan, achter elkaar te schrijven. (Als b.v. $a=24$ en $b=578$, dan is dus $\overline{a\ b}=24578$.) Het is geoorloofd, dat *b* met een aantal nullen begint.

76. Vier eenzaam wonende boeren komen overeen een cirkelvormige weg aan te leggen, zodat zij elk even ver van de weg wonen. De vier boerderijen (als punten op te vatten) liggen niet op een cirkelomtrek; geen drie ervan liggen op een rechte.

Op hoeveel manieren kan zo'n weg aangelegd worden?

## OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

73. A heeft opgeschreven: B zal op zijn papier een foute bewering opschrijven. Als B opschrijft, dat A's bewering goed is, dan heeft B een onjuist antwoord gegeven en het zelfde is het geval, als B opschrijft, dat A's bewering fout is. Wat B opschrijft, is dus irrelevant.

74. We doen de algemeenheid niet te kort door te onderstellen, dat om de convexe veelhoek een cirkel beschreven kan worden. Breng een halve bol aan, waarvan deze cirkel de begrenzing is. Richt in elk punt van samenkomst $P_i$ een loodlijn op het vlak van de cirkel op en noem het snijpunt daarvan met de halve bol $P_i'$. Binnen de convexe veelhoek bevindt zich een net van driehoeken, vierhoeken, enz. Breng in de vierhoeken enz. diagonalen aan, zo, dat deze in driehoeken verdeeld worden. Met elke driehoek $P_iP_jP_k$ correspondeert nu een driehoek $P_i'P_j'P_k'$. Deze driehoeken vormen samen met de convexe veelhoek een convex veelvlak. In elk hoekpunt van dit veelvlak komen minstens zes ribben samen. De vlakke hoeken bij elk hoekpunt zijn dus gemiddeld minder dan 60°. De hoeken van een veelhoek zijn echter steeds gemiddeld minstens 60°. We komen zo dus tot een contradictie. De verdeling is dus niet mogelijk.